NOTAS DE CÁTEDRA
UNIDAD Nº 1: ÁLGEBRA VECTORIAL

Los **puntos** se anotan convencionalmente con letra mayúscula y sus **coordenadas** con letra minúscula:

- En el *plano cartesiano* ($\mathbb{R}^2$): $A\ (x_1; y_1)$
- En el *espacio tridimensional* ($\mathbb{R}^3$): $A\ (x_1; y_1; z_1)$

Distancia entre dos puntos

Sean $A(x_1; y_1; z_1)$ y $B(x_2; y_2; z_2)$ dos puntos en $\mathbb{R}^3$. La distancia entre dichos puntos se denota $d(A; B)$ o $d(B; A)$ y se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Vectores definidos entre dos puntos

Dados los puntos $A(x_1; y_1; z_1)$ y $B(x_2; y_2; z_2)$, es posible definir a partir de ellos dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\ ;\ y_2 - y_1\ ;\ z_2 - z_1) \ \text{ y } \ \overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2\ ;\ y_1 - y_2\ ;\ z_1 - z_2)$$

$\overrightarrow{AB}$ se lee: *"vector con origen en A y extremo en B"* y de forma análoga $\overrightarrow{BA}$ se leerá: *"vector con origen en B y extremo en A".* Para vectores en $\mathbb{R}^2$ omitiremos la tercera coordenada, z.

Vectores equipolentes

Son aquellos vectores que tienen la misma norma, dirección y sentido.

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = \vec{v} \iff u_1 = v_1\ ;\ u_2 = v_2\ ;\ \dots\ ; u_n = v_n$$

Norma de un vector

La norma de un vector, que se denota $\|\vec{u}\|$, es la longitud de este y se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2}$$

OPERACIONES CON VECTORES

- **Producto entre un escalar y un vector en $\mathbb{R}^n$.** Sean $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$; $\lambda, t \in \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{\lambda}\vec{u} = \boldsymbol{\lambda}(u_1; u_2; \dots; u_n) = (\boldsymbol{\lambda} u_1; \boldsymbol{\lambda} u_2; \dots; \boldsymbol{\lambda} u_n) \in \mathbb{R}^n$$

Propiedades: $\vec{u}, \vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^n \ \wedge \ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

1. $\boldsymbol{\lambda}\,\vec{u} = \vec{u}\,\boldsymbol{\lambda}$ . . . . conmutativa
2. $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t}\,\vec{u}) = (\boldsymbol{\lambda t})\,\vec{u}$ . . . . asociativa
3. si $\boldsymbol{\lambda} = 1 \implies \boldsymbol{\lambda}\vec{u} = 1\vec{u} = \vec{u}$. . . . . neutro multiplicativo
4. si $\boldsymbol{\lambda} = -1 \implies \boldsymbol{\lambda}\vec{u} = -1\vec{u} = -\vec{u}$ . . . . . . vector opuesto
5. si $\boldsymbol{\lambda} = 0 \implies \boldsymbol{\lambda}\vec{u} = 0\,\vec{u} = \vec{\mathbf{0}}$ . . . . .vector nulo

6. $\|\boldsymbol{\lambda}\,\vec{u}\| = |\boldsymbol{\lambda}|\;\|\vec{u}\|$, siendo $|\boldsymbol{\lambda}|$ el valor absoluto de $\boldsymbol{\lambda}$.

Demostración: $\|\boldsymbol{\lambda}\,\vec{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\lambda} u_1)^2 + (\boldsymbol{\lambda} u_2)^2 + \cdots + (\boldsymbol{\lambda} u_n)^2} =$
$= |\boldsymbol{\lambda}|\,\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2} = |\boldsymbol{\lambda}|\;\|\vec{u}\|$

Notas: i) si $|\lambda| > \mathbf{1} \implies \|\boldsymbol{\lambda}\,\vec{u}\| > \|\vec{u}\|$; ii) si $|\boldsymbol{\lambda}| < \mathbf{1} \implies \|\boldsymbol{\lambda}\,\vec{u}\| < \|\vec{u}\|$
iii) si $|\boldsymbol{\lambda}| = \mathbf{1} \implies \|\boldsymbol{\lambda}\,\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$; iv) si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \implies \|\boldsymbol{\lambda}\,\vec{u}\| = \left\|\vec{\mathbf{0}}\right\| = 0$

Condición de paralelismo entre vectores

Dos vectores, no nulos, son paralelos si y solo si es posible expresar a uno de ellos como el resultado del otro, multiplicado por un escalar. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$

$$\vec{u} \,//\, \vec{v} \iff \vec{u} = \boldsymbol{\lambda}\,\vec{v} \iff (u_1; u_2; \dots; u_n) = (\boldsymbol{\lambda} v_1; \boldsymbol{\lambda} v_2; \dots; \boldsymbol{\lambda} v_n)$$

.

❖ **Adición de vectores**

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1; u_2; \dots; u_n) + (v_1; v_2; \dots; v_n) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; \dots; u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$$

Propiedades: Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^n \;\wedge\; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ . . . . conmutativa
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ . . . . . . .asociativa
3. $\vec{u} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{u} = \vec{u}$. . . . . neutro aditivo
4. $\boldsymbol{\lambda}(\vec{u} + \vec{v}) = \boldsymbol{\lambda}\vec{u} + \boldsymbol{\lambda}\vec{v}$. . . . . .distributiva respecto a la adición de vectores
5. $(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{t})\vec{u} = \boldsymbol{\lambda}\vec{u} + \boldsymbol{t}\vec{u}$ . . . . distributiva respecto a la adición de escalares
6. $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{\mathbf{0}}$ . . . . .opuesto aditivo

Versor

Es un vector de norma uno, llamado también vector unitario.

Versor asociado

Sea $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. El versor asociado al vector $\vec{u}$, que se denota $\breve{\boldsymbol{u}}$, es un vector de norma uno que además tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{u}$.

$$\breve{\boldsymbol{u}} = \frac{\mathbf{1}}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

Versores Fundamentales

Son vectores de norma uno que indican la dirección de los ejes coordenados.
En $\mathbb{R}^3$ indican la dirección de los ejes x, y, z: $\breve{\boldsymbol{\imath}} = (1{,}0{,}0)$; $\breve{\boldsymbol{\jmath}} = (0{,}1{,}0)$; $\breve{\boldsymbol{k}} = (0{,}0{,}1)$
En $\mathbb{R}^2$ indican la dirección de los ejes x, y: $\breve{\boldsymbol{\imath}} = (1{,}0)$; $\breve{\boldsymbol{\jmath}} = (0{,}1)$

Notación Canónica de un vector de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = u_1\breve{\boldsymbol{\imath}} + u_2\,\breve{\boldsymbol{\jmath}} + u_3\breve{\boldsymbol{k}}$
$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3) = u_1(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + u_2\,(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) + u_3(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = u_1\breve{\boldsymbol{\imath}} + u_2\,\breve{\boldsymbol{\jmath}} + u_3\breve{\boldsymbol{k}}$. Para vectores en $\mathbb{R}^2$ se debe omitir la tercera componente.

❖ Producto Escalar o Punto

Se define para vectores en $\mathbb{R}^n$ y su resultado es un número real.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1; u_2; \ldots; u_n) \cdot (v_1; v_2; \ldots; v_n) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n \quad \in \mathbb{R}$$

Propiedades: Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^n \quad \wedge \quad \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ . . . . conmutativa
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \pm \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \pm \vec{u} \cdot \vec{w}$ . . . . distributiva
3. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ . . . . cuadrado de la norma
4. $\boldsymbol{\lambda}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\boldsymbol{\lambda}\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\boldsymbol{\lambda}\vec{v})$. . . . . . asociativa respecto al producto por un escalar

Producto escalar a partir del ángulo entre vectores y las normas: Sólo para para vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \qquad con\ \ 0 \le \theta \le \pi$$

Despejando podremos obtener la expresión que permite hallar el ángulo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Condición de perpendicularidad entre vectores

Dos vectores no nulos son perpendiculares si y sólo si el producto escalar entre ellos es nulo. Sean $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Dem.: A partir de la ecuación $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, podemos deducir que si ambos vectores son perpendiculares entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \frac{3\pi}{2}$, de modo que $\cos\theta = 0$. Llegamos así a que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ángulos directores

Son los ángulos que el vector forma con los semiejes de coordenadas **positivas**.
Para $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3) \in \mathbb{R}^3$, los ángulos directores que se determinan con los tres semiejes de x, y, z se denotan α, β, γ respectivamente.

Cosenos directores

$$cos\,\alpha = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|} \quad ; \quad cos\,\beta = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|} \quad ; \quad cos\,\gamma = \frac{u_3}{\|\vec{u}\|}$$

Podemos ver la deducción de estas expresiones y un Ejemplo en el siguiente video: https://youtu.be/homORPSxBds

Si en algún video se explica algo que contradice lo dicho en las Notas de Cátedra, no dudes en consultar con tu docente o en las clases de consulta.

En $\mathbb{R}^3$ se cumple que: $cos^2\,\alpha +\ cos^2\,\beta +\ cos^2\,\gamma = 1$. Para vectores en $\mathbb{R}^2$ se deben omitir γ y $cos\,\gamma$, respectivamente.

Componente Escalar

La componente escalar de un vector $\vec{u}$ sobre la dirección de otro vector $\vec{v}$ está definida para vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
$Comp_{\vec{v}}\,\vec{u} = \|\vec{u}\|\cos\theta$, despejando $\cos\theta$ de la interpretación geométrica del producto escalar y remplazando, tenemos:

$$\|\vec{u}\|\cos\theta = \|\vec{u}\|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{Comp_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

Note que su resultado es un *escalar.*

Proyección Vectorial

La proyección vectorial de un vector $\vec{u}$ sobre la dirección de otro vector $\vec{v}$ también está definida para vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
$\overrightarrow{Proy_{\vec{v}}\,\vec{u}} = Comp_{\vec{v}}\,\vec{u}\cdot\boldsymbol{\breve{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\boldsymbol{\breve{v}}$, remplazando por $\boldsymbol{\breve{v}} = \frac{\mathbf{1}}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ tenemos:

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\boldsymbol{\breve{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\overrightarrow{Proy_{\vec{v}}\,\vec{u}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v}}$$

Su resultado es un *vector*.

Podemos ver la explicación en el siguiente video
https://youtu.be/dWC71mYInws

Para responder después de ver el video
1.- ¿Qué es la componente de un vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$?
2.- En el video cuando se habla de magnitud se refiere a la componente, ¿la componente es siempre positiva?
3.- ¿Cuál es la diferencia entre componente de un vector y la proyección?
4.- ¿Cómo se calcula la proyección de un vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$?
5.- Como se observa, el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ debe estar en la misma dirección que $\vec{v}$ ¿qué concepto garantiza esto?

Podemos ver la construcción en Geogebra, de una proyección vectorial en el espacio, a través de: https://youtu.be/cTyV0FS-hdU

❖ Producto Vectorial o Cruz

Operación definida sólo para vectores de $\mathbb{R}^3$ y su resultado es otro vector, también de $\mathbb{R}^3$.

Def.: $\vec{u} \times \vec{v} = (u_1; u_2; u_3) \times (v_1; v_2; v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2 \,;\, u_3v_1 - u_1v_3 \,;\, u_1v_2 - u_2v_1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\breve{\boldsymbol{\imath}} - (u_1v_3 - u_3v_1)\breve{\boldsymbol{\jmath}} + (u_1v_2 - u_2v_1)\breve{\boldsymbol{k}} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$ *(pseudodeterminante)*

En el siguiente video podemos ver la interpretación geométrica y la fórmula que define el producto vectorial
https://youtu.be/7RpFjPEuybM

Propiedades: Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^3 \;\wedge\; \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ . . . . anti-conmutativa
2. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{w} \perp \vec{u} \;\wedge\; \vec{w} \perp \vec{v}$ (con $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{\mathbf{0}}$). . . . . perpendicularidad del producto vectorial
3. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathbf{0}} \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \,//\, \vec{v}$ (con $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$). . . . . . segunda condición de paralelismo
4. $\vec{u} \times (\vec{v} \pm \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} \pm \vec{u} \times \vec{w}$ . . . . .distributiva a izquierda respecto de la adición
5. $(\vec{v} \pm \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} \pm \vec{w} \times \vec{u}$. . . . . . distributiva a derecha respecto de la adición
6. $\boldsymbol{\lambda}(\vec{u} \times \vec{v}) = (\boldsymbol{\lambda}\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\boldsymbol{\lambda}\vec{v})$. . . . .asociativa respecto al producto por un escalar
7. $\vec{u} \times \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \times \vec{u} = \vec{\mathbf{0}}$. . . . . producto con vector nulo a derecha o izquierda

Interpretación geométrica de la norma del producto vectorial

Sean en $\mathbb{R}^3$ dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Podemos determinar a partir de ellos un paralelogramo cuyos lados consecutivos son las medidas de sus normas $\| \vec{u} \|$ y $\| \vec{v} \|$ respectivamente. El área de dicho paralelogramo se puede calcular con la fórmula:

$$\textit{Área del paralelogramo} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \, sen\, \theta$$

Si dividimos un paralelogramo por cualquiera de sus diagonales obtenemos dos triángulos de igual área. Esto nos permite calcular el área del triángulo determinado por dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$ con la fórmula:

$$\textit{Área del triángulo} = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2} = \frac{\| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \, sen\, \theta}{2}$$

❖ Producto Mixto o Triple producto escalar

Está definido solamente para vectores en $\mathbb{R}^3$ y su resultado es un número real.

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (w_1; w_2; w_3) \cdot [(u_1; u_2; u_3) \times (v_1; v_2; v_3)] =$$

$$= (w_1; w_2; w_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2 \,;\, u_3v_1 - u_1v_3 \,;\, u_1v_2 - u_2v_1) =$$

$$= w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\Rightarrow \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades: Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

1. $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -\vec{w} \times (\vec{v} \times \vec{u})$. . . . . anti-conmutativa

2. $\boldsymbol{\lambda}\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{w} \cdot [\boldsymbol{\lambda}(\vec{u} \times \vec{v})]$. . . . . asociativa respecto al producto por un escalar

3. $\vec{\mathbf{0}} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{w} \cdot \left(\vec{\mathbf{0}} \times \vec{u}\right) = \vec{v} \cdot \left(\vec{w} \times \vec{\mathbf{0}}\right) = 0$ . . . . producto con vector nulo

4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

Interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto

Sean en $\mathbb{R}^3$ tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Podemos determinar a partir de ellos un paralelepípedo cuyas aristas no paralelas son las medidas de sus normas $\|\vec{u}\|$,$\|\vec{v}\|$ y $\|\vec{w}\|$ respectivamente. El volumen de dicho paralelepípedo se puede calcular con la fórmula:

Volumen del Paralelepípedo $= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

Podemos ver en este video la interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto
https://youtu.be/Gzd7RFXkF3A

Nota: *Volumen del paralelepípedo = 2 · (Volumen del prisma) = 6 · (Volumen del tetraedro)*

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Sea en $\mathbb{R}^m$ el siguiente conjunto de vectores: $\boldsymbol{A} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$
Def.: Si existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ que puede obtenerse a partir de todos los vectores del conjunto $\boldsymbol{A}$, a través de la siguiente expresión:

$$\vec{v} = \boldsymbol{\lambda_1}\vec{u_1} + \boldsymbol{\lambda_2}\vec{u_2} + \dots + \boldsymbol{\lambda_n}\vec{u_n} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda_i}\vec{u_i} \qquad (\boldsymbol{\lambda_i} \in \mathbb{R})$$

Se dice que $\vec{v}$ es una ***combinación lineal*** de $\boldsymbol{A} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$

Conjunto linealmente independiente: El conjunto de vectores $\boldsymbol{A}$ es *linealmente independiente* si y sólo si la *combinación lineal*:

$$\vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{\lambda_1}\vec{u_1} + \boldsymbol{\lambda_2}\vec{u_2} + \dots + \boldsymbol{\lambda_n}\vec{u_n}$$

*es posible **únicamente** con **todos** los escalares nulos, es decir,* $\boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_2} = \dots = \boldsymbol{\lambda_n} = 0$.

Conjunto linealmente dependiente: El conjunto de vectores $\boldsymbol{A}$ es *linealmente dependiente* si no es *linealmente independiente*, es decir, si la *combinación lineal:*

$$\overrightarrow{\mathbf{0}} = \boldsymbol{\lambda_1}\overrightarrow{u_1} + \boldsymbol{\lambda_2}\overrightarrow{u_2} + \cdots + \boldsymbol{\lambda_n}\overrightarrow{u_n}$$

es posible con ***algún*** *escalar* ***no nulo****, es decir, existe algún* $\boldsymbol{\lambda_i} \neq 0$.

Propiedad*: si existe al menos un* $\boldsymbol{\lambda_i} \neq 0$ *entonces existe por lo menos un vector que es combinación lineal de los otros*

Podemos encontrar un Ejemplo y una síntesis del tema en el siguiente video: https://youtu.be/4d3S0cbsf_s

GUÍA DE TRABAJO PRÁCTICO N° 1

ÁLGEBRA VECTORIAL

A lo largo de la guía de Actividades cuando el logo de Geogebra aparezca en el enunciado de un problema, se está indicando o sugiriendo resolverlo con dicho software. Se puede descargarse gratuitamente en el celular o PC. ¡Pero no olvidar la resolución analítica!

1. Dados los vectores $\vec{u} = (4; -3)$; $\vec{v} = (-2; 5)$ y $\vec{w} = (-1; 4)$, obtenga:
   a) $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\vec{v} - \vec{u}$; $2\vec{v} - \vec{w}$; $-\vec{v} + 2\vec{w} - 3\vec{u}$
   Grafique con papel y lápiz y también con GeoGebra si lo desea.
   b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$; $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ Compare los resultados obtenidos.
   c) $\|-k\vec{v}\|$; $|-k|\|\vec{v}\|$ Compare los resultados obtenidos.
   d) Las coordenadas del punto *B*, sabiendo que el punto $A(3;\ 1)$ es el origen y *B* el extremo del vector $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
   e) La norma del vector $\vec{s} = \frac{1}{4}\vec{w}$.
   f) El versor asociado a $\vec{u}$.
   g) Un versor de la misma dirección que $\vec{u}$. ¿Cuántos vectores con dichas condiciones existen?
   h) Un vector paralelo a $\vec{u}$ de norma 8. ¿Cuántos vectores con dichas condiciones existen?

2. Dados los puntos $O\ (0;\ 0;\ 0)$; $A\ (\ 1;\ 2;\ -3)$; $B\ (0;\ 4;\ 5)\ y\ C\ (3;\ -2;\ -4)$, halle:

   a) $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB}$. Visualice en GeoGebra los puntos y los vectores
   b) $\|\overrightarrow{OA}\|$; $\|\overrightarrow{AB}\|$
   c) Un versor de idéntica dirección y sentido que $\overrightarrow{OA}$.
   d) Las coordenadas del punto D, tal que $\overrightarrow{CD}$ sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$
   e) Las coordenadas del punto M, tal que $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

3. Dados los vectores $\vec{u} = 5\check{\imath} + 3\check{k}$; $\vec{v} = \check{\imath} - 2\check{\jmath} + 5\check{k}$ y $\vec{w} = 3\check{\imath} - \check{\jmath} - 4\check{k}$, encuentre:

a) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $-\overrightarrow{v}+2\overrightarrow{w}-3\overrightarrow{u}$
b) $\|\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}\|\cdot 4\,\|\overrightarrow{w}\|$
c) Un vector de norma quince, paralelo a $\overrightarrow{w}$. ¿Cuántos vectores con dichas condiciones existen?

4. Luego de explorar la siguiente escena:

https://www.geogebra.org/m/wkjbs2hu

Responde:
¿Qué puede decir de la medida del ángulo comprendido entre dos vectores no nulos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ si:

a) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$? b) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}<0$? c) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}>0$?

Justifica analíticamente lo visualizado en GeoGebra. ¿Serán las mismas respuestas si son vectores de tres dimensiones?

5. ¿Existen algún vector perpendicular a $\overrightarrow{v}=\check{\imath}-3\check{\jmath}-\check{k}$ cuya tercera componente sea – 4 y su norma $\sqrt{32}$?

6. Si se sabe que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-30$, $\|\overrightarrow{u}\|=9$ y $\|\overrightarrow{v}\|=7$. Obtener, utilizando propiedades, $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$ y $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$

7. Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(3;-4)$ y $\overrightarrow{v}=(1;5)$ de $\mathbb{R}^2$, encuentre:
   a) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ y la medida del ángulo que forman $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
   b) El vector proyección de $\overrightarrow{u}$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$. Grafique.
   c) El vector proyección de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$. Grafique.
   d) La componente de $\overrightarrow{u}$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$
   e) Un versor perpendicular a $\overrightarrow{u}$. ¿Cuántos existen?

8. Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(3;-4)$ y $\overrightarrow{v}=(1;5)$ halle, si existe, un vector distinto del nulo de $\mathbb{R}^2$, perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ simultáneamente.

   ¿La respuesta obtenida es válida para cualquier par de vectores? ¿Cómo tienen que ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que exista un vector simultáneamente perpendicular a ambos?

   Puede explorar en GeoGebra para aventurar alguna respuesta y después validarla con argumentos teóricos.

9. Los puntos $A\,(5;\ 3;0)$, $B(2;-3;1)$ y $C(-5;\ -2;\ 1)$ son vértices de un triángulo. Determine área, perímetro y altura del mismo respecto del lado AB.
   Puede ayudarlo a visualizar lo pedido si trabaja con GeoGebra, identifique los puntos, el triángulo y la altura pedida.

10. Dados los vectores $\overrightarrow{u}=\check{\imath}+3\check{\jmath}-4\check{k}$ y $\overrightarrow{v}=\check{\imath}-2\check{k}$ de $\mathbb{R}^3$, halle:
    a) Un versor perpendicular simultáneamente a ambos vectores. ¿Cuántos vectores con dichas condiciones existen?
    b) Un vector de norma nueve perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.¿Cuántos vectores con dichas condiciones existen?

11. Sean los puntos $A\ (2;\ 3;-1)$, $B(x;\ 1\ ;0)$ y $C(4;\ 3;\ 2)$: Halle x para que el vector $\vec{u} = (6;\ 4;\ -4)$ sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ simultáneamente.
El camino de resolución elegido ¿es el único posible? ¿es el más económico en cantidad de pasos?

12. Halle todos los valores de $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}$, si existen, para que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores: $\vec{u} = (1;\ 2;\ 3)$; $\vec{v} = (\boldsymbol{h};\ 0;\ 2)$ y $\vec{w} = (1;-2;\ 1)$ sea igual a nueve unidades cúbicas.

13. ¿Existen los escalares $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}\ y\ \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$ tales que $(-6;\ 4;\ 2) = \boldsymbol{h}\,(1;\ 0;\ 0) + \boldsymbol{k}\,(0;\ 0;\ 1) + \boldsymbol{m}\,(0;\ 2;\ 2)$?. Justifique su respuesta.

14. Halle si existe el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1,1,\boldsymbol{k})$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (0,1,1)\ \ y\ \vec{w} = (1,1,2)$

15. Sea $\{\vec{v_1}\,;\vec{v_2}\,;\vec{v_3}\}$ un conjunto de vectores linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$, analice la independencia lineal del conjunto de vectores $\{\vec{v_1}\,;\vec{v_2}\}$.¿Es suficiente la información dada? ¿La respuesta es única?

16. Decida si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:
a) $A = \{\,(1;\ -2;\ 3);\ (-3;\ 5;\ 8);\ (-2;\ 2;\ 1)\,\}$
b) $B = \{\,(1;\ -2);\ (-3;\ 5);\ (2;\ 1)\,\}$
c) $C = \{\,(1;\ 2;\ -3;\ 0)\,\}$
d) $D = \{\,(1;\ 2)\ ;\ (-1; 2)\,\}$
e) $E = \{\,(1;\ -2;\ 3);\ (-3;\ 5;\ 8);\ (-2;\ 2;\ 1);\ (0; 1; 2)\,\}$
f) $F = \{\,(1;\ 2;-3;\ 2);\ (0;\ 0;\ 0;\ 0)\,\}$
g) $G = \{\,(-2;\ 3;\ 1);\ (-1;\ -4;\ 2);\ (-10;\ 4;\ 8)\,\}$

❖ **EJERCICIOS ADICIONALES:**

1. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (3; -4)$ y $\overrightarrow{v} = (a; -2)$ de $\mathbb{R}^2$, encuentre de ser posible $a \in \mathbb{R}$ para que el ángulo determinado por los dos vectores sea $\frac{2}{3}\pi$.

2. Dado un vector $\overrightarrow{w}$ de norma tres, con ángulos directores $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\beta = \frac{\pi}{6}$. Encuentre las componentes del o los vectores para:
   $a)\ \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2$ b) $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$

3. Calcule la medida de los ángulos interiores de un triángulo cuyos vértices son:
   $A\ (-1;\ 1;\ 0)$; $B\ (2;\ 2;\ 1)$ y $C\ (1;\ 0;\ 2)$.

4. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ vectores en $\mathbb{R}^2$. Demuestre utilizando las propiedades que
   $$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\,\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|^2$$

5. Encuentre $k \in \mathbb{R}$ para que la proyección vectorial del vector $\vec{v} = (2; k; -2)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (k-1; 1; -2)$ sea un vector de norma dos.

6. Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ vectores no nulos. ¿Qué puede decirse de ambos vectores en cada uno de los siguientes casos?
   $\overrightarrow{Proy_{\overrightarrow{u}}}\ \overrightarrow{v} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{Proy_{\overrightarrow{u}}}\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$ c) $\overrightarrow{Proy_{\overrightarrow{u}}}\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$

7. Dados los puntos $A\ (-1;\ 2;\ 3)$; $B\ (0;\ 2;\ 5)$; $C\ (4;\ 0;\ 6)$
   a) Verifique que los puntos no están alineados. Justifique.
   b) Halle el área del triángulo ABC.
   c) Halle la altura del triángulo respecto al lado BC.

8. Dadas las coordenadas de los puntos $A(1,1,0)$, $B(-1,-1,-1)$ y $C(2,2,0)$
   a) Encuentre las coordenadas del punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo.
   b) Determine el área del paralelogramo $ABCD$.

9. Calcular el volumen de un tetraedro cuyos vértices son:
   $A\ (1;\ 0;\ 0)$; $B\ (0; -1;\ 0)$; $C\ (0;\ 0;\ -1)$ y $D\ (0;\ 0;\ 1)$

10. Dados los puntos $A(1,0,1), B(1,1,1)$ y $C(1,6,a)$ halle de ser posible:
    a) Los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que los tres puntos queden alineados.
    b) Los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que los puntos sean tres vértices de un triángulo de área $\frac{3}{2}\,u^2$.

11. Dados los puntos $A\ (1;\ 2;\ 0)$; $B\ (2;\ 1;\ \boldsymbol{c})$; $C\ (\boldsymbol{c}+1;\ 3;\ 3)$ y $D\ (3;\ 3;\ 3)$. Halle todos los valores de $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, si existen, para que el volumen del paralelepípedo con vértices en A, B, C, D sea igual a seis unidades cúbicas.

12. ¿Es posible expresar al vector $\overrightarrow{u} = (3;\ 0)$ como una combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v} = (2;\ 1)$ y $\overrightarrow{w} = (5;\ 1)$?. Justifique su respuesta.

❖ EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN:

1. ¿Es posible que existan dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7$; $\|\vec{u}\| = 2$ y $\|\vec{v}\| = 3$? ¿Su respuesta cambia si los vectores son de $\mathbb{R}^2$ $o\ de$ $\mathbb{R}^3$?

2. ¿Son perpendiculares las diagonales de un cubo? Justifique su respuesta utilizando los contenidos desarrollados en la unidad.

3. Hallar todos los vectores de norma $\sqrt{20}$ que formen con el vector $\vec{v} = (1; 2)$ un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.

4. Dados $\vec{u} = (2;\ \boldsymbol{a};\ 0)$; $\vec{v} = (\boldsymbol{a};\ 1;\ 2)$ y $\vec{w} = (-2;\ \boldsymbol{b};\ -1)$, halle todos los valores reales de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que:
   a) $\vec{v}\ //\ \vec{w}$ b) $\vec{v}\ \perp\ \vec{w}$ c) $\overrightarrow{Proy_{\vec{u}}\ \vec{v}} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$

5. Sea en $\mathbb{R}^3$ el triángulo isósceles AOB, donde O es el origen de coordenadas, A pertenece al eje "x", B al eje "y". Halle las coordenadas de los puntos A y B sabiendo que el área del triángulo es igual a dieciséis unidades cuadradas.

6. Proponga un conjunto de tres vectores que **no** sea linealmente independiente, pero, si se toman dos cualesquiera, este nuevo conjunto **sí** lo sea:
   a) En $\mathbb{R}^2$ b) En $\mathbb{R}^3$

7. Sea $\{\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3}\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$, analice la independencia lineal del conjunto de vectores $\{\vec{v_1}; \vec{v_2}\}$.

8. Determine de ser posible los valores de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ de manera tal que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente independientes:
   a) $A = \{(1;\ 0;\ 1)\ ;\ (0;\ 1;\ \boldsymbol{\lambda})\ ;\ (-2;\ 0;\ -2)\}$
   b) $B = \{(2\boldsymbol{\lambda};\ -2;\ 3)\ ;\ (0;\ -2;\ \boldsymbol{\lambda})\ ;\ (-2;\ 0;\ -2)\}$
   c) $= \{(\boldsymbol{\lambda}^2;\ 2;\ 3)\ ;\ (\boldsymbol{\lambda};\ -2;\ -3)\}$

9. Sean $P = (a, 0,0)$ y $Q = (0,0, b)$. Encuentre todos los valores de a y b de forma tal que el conjunto $C = \{\overrightarrow{PQ}; (-1,0,1)\}$ sea linealmente dependiente y $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{8}$.

10. Sea $E = \{\vec{v_1}; \vec{v_2}\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$. Señale en cada caso con V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justifique.
    a) $\{\boldsymbol{k}\vec{v_1}\ ;\ \vec{v_2}\}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}\ con\ k \neq 0$, es linealmente independiente.
    b) $\{\vec{v_1} + \vec{v_2}\ ;\ \vec{v_1}\}$ es linealmente independiente.